Contrôle du 06/03/2010

Ex. 1

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 2\}$

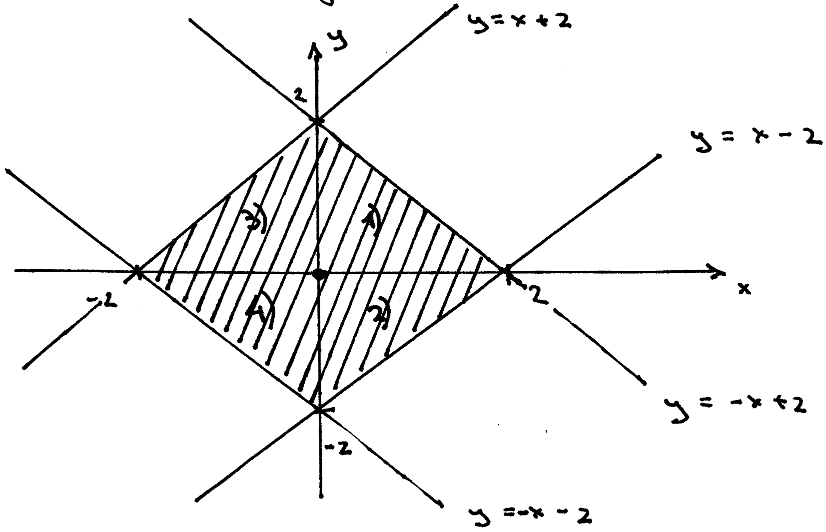
1). $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x + y \leq 2 \Rightarrow y \leq -x+2$

2). $x \geq 0, y \leq 0 \Rightarrow x - y \leq 2 \Rightarrow y \geq x - 2$

3). $x \leq 0, y \geq 0 \Rightarrow -x+y \leq 2 \Rightarrow y \leq x+2$

4). $x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow -x-y \leq 2 \Rightarrow y \geq -x-2$

Donc D a la forme suivante:



Alors

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{0} \left[\int_{-x-2}^{x+2} f(x,y)\,dy \right] dx$$

$$+ \int_{0}^{2} \left[\int_{x-2}^{-x+2} f(x,y)\,dy \right] dx$$

c'est-à-dire, on peut transformer l'intégrale double en une somme de deux intégrales itérées pour $f(x,y)$ arbitraire.

Dans notre cas $f(x,y) = x^2+y^2$ vérifie $f(x,-y) = f(x,y)$, $f(-x,y) = f(x,y)$, et de plus D est invariant par rapport aux reflexions par rapport à l'axe Ox et Oy, ce qui permet de simplifier:

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = 4 \iint_{D_1} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= 4 \int_0^2 \left[\int_0^{-x+2} (x^2+y^2)\,dy \right] dx =$$

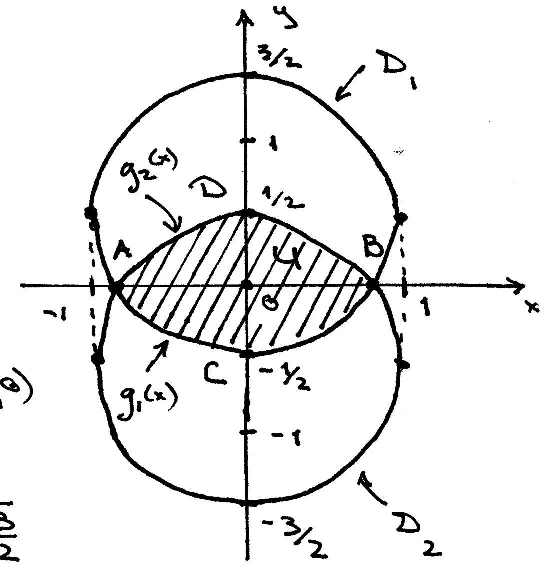
$$= 4\int_0^2 \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{-x+2} dx = 4\int_0^2 \left(x^2(-x+2) + \frac{(-x+2)^3}{3}\right)dx =$$

$$= 4\int_0^2 \left(-x^3 + 2x^2 - \frac{(x-2)^3}{3}\right)dx =$$

$$= 4\left(-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{(x-2)^4}{3\cdot 4}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 4\left(-\frac{16}{4} + 2\cdot\frac{8}{3} + \frac{16}{3\cdot 4}\right) = 4\left(-4 + \frac{16}{3} + \frac{4}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

Ex. 2



Méthode géométrique:

Notons $C = (0, -\frac{1}{2})$, $D = (0, \frac{1}{2})$

Soient A, B les points d'intersection des disques avec l'axe Ox. Comme $A = (x_A, 0)$, $B = (x_B, 0)$ et $A, B \in D_1$, on a

$$x_A^2 + (0 - \tfrac{1}{2})^2 = 1 \Rightarrow x_A^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et de même $x_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

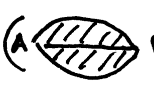
Nous avons $|\vec{AC}| = 1$ (car $|\vec{AC}|$ = rayon de D_2)

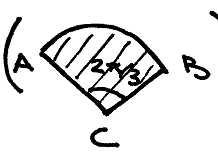
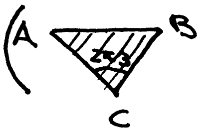
$$|\vec{OC}| = \tfrac{1}{2}$$

et donc $\sin(\angle ACO) = \dfrac{|\vec{OC}|}{|\vec{AC}|} = \dfrac{1/2}{1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle ACO = \pi/3$

et de la même manière $\angle BCO = \pi/3$. Donc $\angle ACB = 2\pi/3$

Notons $U = D_1 \cap D_2$. On cherche l'aire de U. On a

aire(U) = aire() = 2·aire() =

= 2 { aire() − aire() } =

$\frac{1}{3}$(aire du cercle de rayon 1) ; $\frac{1}{2}|\vec{AB}|\cdot|\vec{CO}| = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Méthode intégrale :

$$\text{aire}(\mathcal{U}) = \iint_{\mathcal{U}} dx\,dy = \left| \begin{array}{l} \text{transformons l'intégrale double} \\ \text{en une intégrale itérée} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right] dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}/2} \left(g_2(x) - g_1(x) \right) dx$$

Il nous faut donc la forme explicite de $g_1(x)$ et $g_2(x)$.

- $y = g_1(x)$ correspond au bord de D_1, donc

  $$x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = 1 \Rightarrow (y - \tfrac{1}{2})^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y - \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{1-x^2},$$

  d'où $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1-x^2}$. Ici le signe "+" correspond à la partie supérieure du cercle et le signe "−" à la partie inférieure (avec $y \leq \frac{1}{2}$), donc

  $$g_1(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{1-x^2}$$

- de la même manière, $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1$ implique $y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1-x^2}$; comme $y = g_2(x)$ correspond à la partie supérieure ($y \geq -\frac{1}{2}$), on obtient

  $$g_2(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{1-x^2}$$

Donc

$$\text{aire}(\mathcal{U}) = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} + \sqrt{1-x^2} \right) dx = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left(2\sqrt{1-x^2} - 1 \right) dx$$

$$= 2 \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\, dx \;-\; x \Big|_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} = 2 \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\, dx - \sqrt{3}.$$

D'autre part,

$$\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\arcsin \sqrt{3}/2}^{\arcsin \sqrt{3}/2} \cos^2 t\, dt = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} =$$

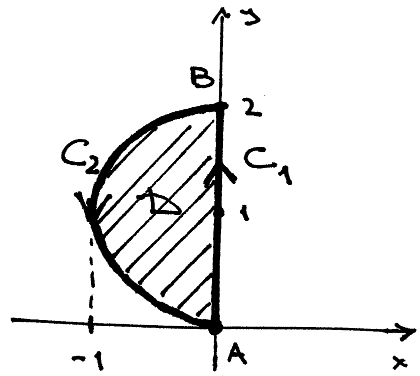
$$= \frac{1}{2}\left(\pi/3 - (-\pi/3) + \frac{\sin 2\pi/3}{2} - \frac{\sin(-2\pi/3)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + \sin 2\pi/3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

et donc

$$\text{aire}(\mathcal{U}) = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$ (ce qui coïncide avec la réponse précédente)

<u>Ex. 3</u> $\quad I = \int_\gamma x\,dy - y\,dx$



1ère méthode (directe)

Paramétrisation de C_1:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ t \in [0,2] \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} dx &= 0 \\ dy &= dt \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{C_1} x\,dy - y\,dx = \int_0^2 0\cdot dt - t\cdot 0 = 0$$

Paramétrisation de C_2:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y - 1 = \sin t \iff y = 1 + \sin t \\ t \in [\pi/2, 3\pi/2] \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} dx &= -\sin t\,dt \\ dy &= \cos t\,dt \end{aligned}$$

d'où:

$$\int_{C_2} x\,dy - y\,dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos t\cdot\cos t\,dt - (1+\sin t)(-\sin t\,dt) =$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\cos^2 t + \sin^2 t + \sin t)\,dt = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1 + \sin t)\,dt =$$

$$= (t - \cos t)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Finalement

$$\int_\gamma x\,dy - y\,dx = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \pi.$$

2ème méthode (thm de Green)

γ est fermée, donc

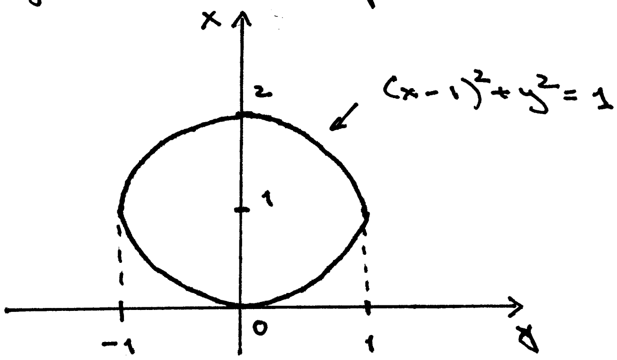
$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Dans notre cas $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$, d'où:

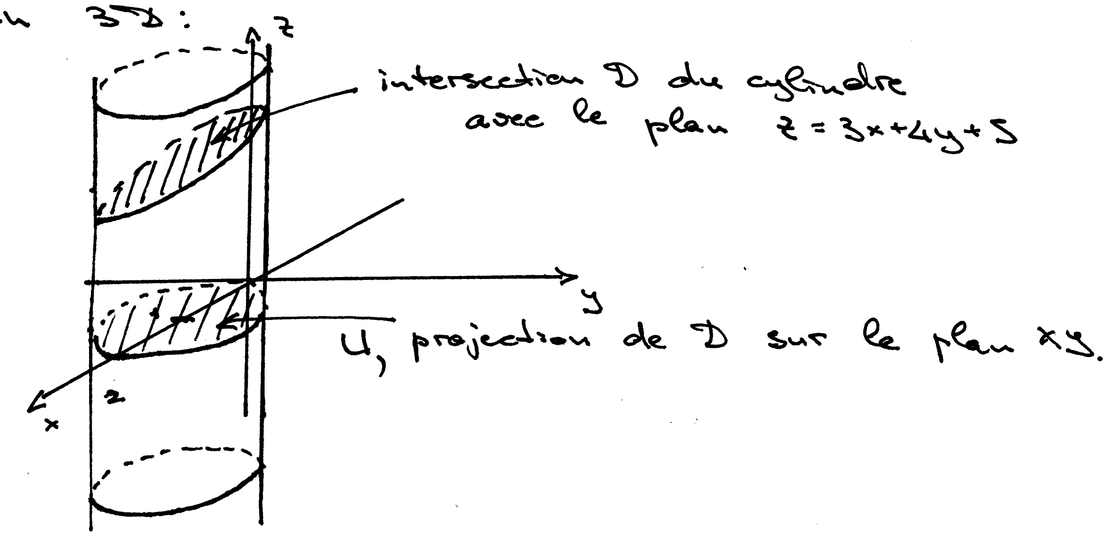
$$\int_\gamma x\,dy - y\,dx = \iint_D (1-(-1))\,dx\,dy = 2\iint_D dx\,dy =$$

$$= 2\cdot \text{aire}(D) = 2\cdot \frac{\pi\cdot 1^2}{2} = \pi.$$

Ex. 4 Projection sur le plan xy:



En 3D:



On peut paramétrer le plan comme

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 3u+4v+5 \\ (u,v)\in U \end{cases} \Rightarrow \vec{F}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 3u+4v+5 \end{pmatrix}$$

et ensuite utiliser la formule

$$\text{aire}(D) = \iint_U \left|\left(\vec{F}'_u \wedge \vec{F}'_v\right)\right| du\,dv$$

De plus,

$$\vec{r}'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}'_u \wedge \vec{r}'_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc $|\vec{r}'_u \wedge \vec{r}'_v| = \sqrt{3^2+4^2+1^2} = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$. Ça implique

$$\text{aire}(D) = \iint_U |\vec{r}'_u \wedge \vec{r}'_v| \, du\,dv = \iint_U \sqrt{26}\, du\,dv = \sqrt{26} \iint_U du\,dv =$$

$$= \sqrt{26} \cdot \text{aire}(U) = \sqrt{26} \cdot \pi \cdot 1^2 = \pi\sqrt{26}.$$

<u>Ex. 5</u> $\quad f(x,y) = \sin x \sin y$

$$\vec{E} = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (\cos x \sin y, \sin x \cos y) =$$

$$= \cos x \sin y \; \vec{e}_x + \sin x \cos y \; \vec{e}_y$$

Notons que $\vec{E}(x+2\pi, y) = \vec{E}(x, y+2\pi) = \vec{E}(x,y)$, donc il suffit de représenter le champ dans le carré $x \in [-\pi, \pi]$, $y \in [-\pi, \pi]$ et ensuite prolonger par périodicité.

Notons également que

$$\vec{E}(x=0, y) = \sin y \; \vec{e}_x, \qquad \vec{E}(x, y=0) = \sin x \; \vec{e}_y,$$

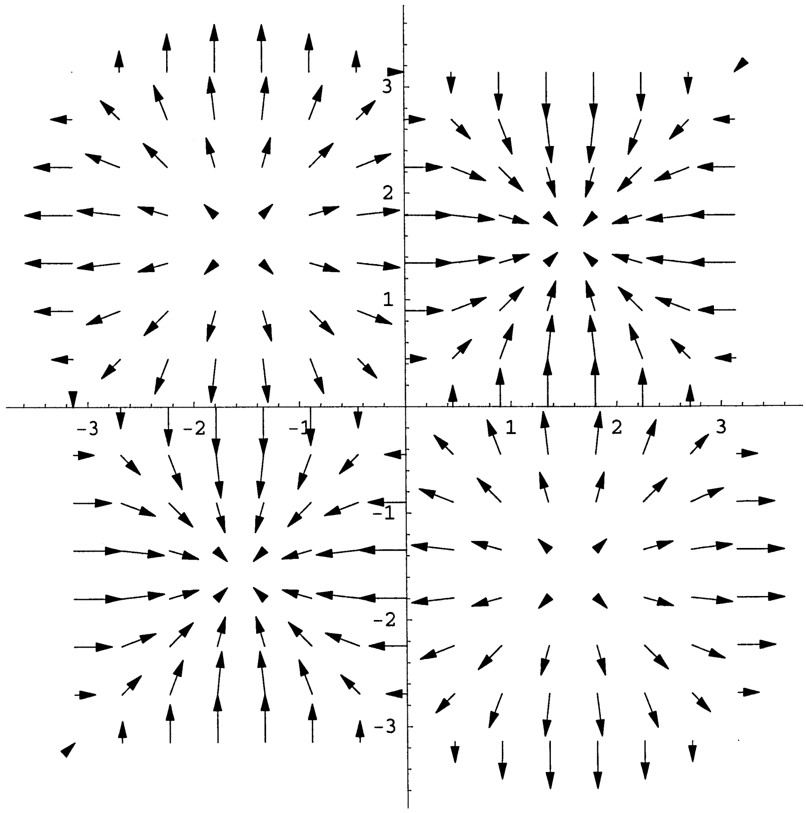
$$\vec{E}(x=\pi, y) = -\sin y \; \vec{e}_x, \qquad \vec{E}(x, y=\pi) = -\sin x \; \vec{e}_y,$$

$$\vec{E}(x=-\pi, y) = -\sin y \; \vec{e}_x, \qquad \vec{E}(x, y=-\pi) = -\sin x \; \vec{e}_y,$$

$$\vec{E}\left(x=\frac{\pi}{2}, y\right) = \cos y \; \vec{e}_y, \qquad \vec{E}(x, y=\pi/2) = \cos x \; \vec{e}_x,$$

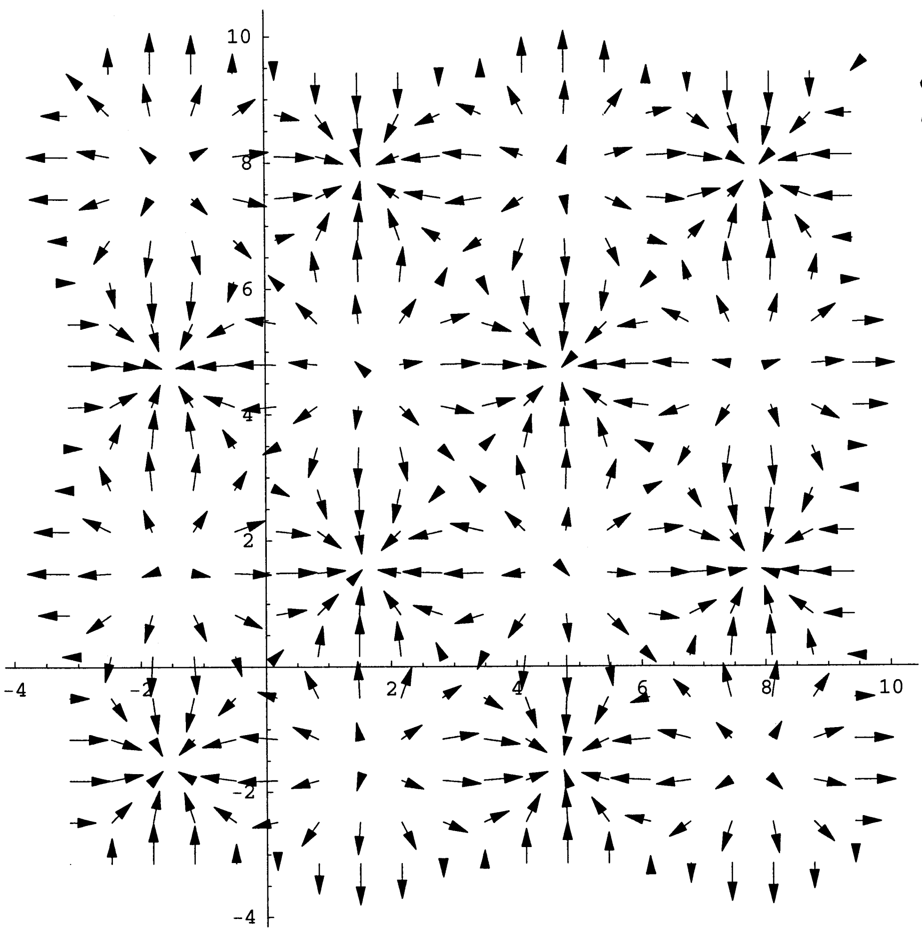
$$\vec{E}(x=-\pi/2, y) = -\cos y \; \vec{e}_y, \qquad \vec{E}(x, y=-\pi/2) = -\cos x \; \vec{e}_x.$$

En calculant $\vec{E}(x,y)$ en quelques points supplémentaires (disons, $x, y = \pm\pi/6, \pm\pi/4, \pm\pi/3, \pm 2\pi/3, \pm 5\pi/6$), on obtient l'image suivante:



$x \in [-\pi, \pi]$

$y \in [-\pi, \pi]$



Après le prolongement par périodicité

$x \in [-\pi, 3\pi]$

$y \in [-\pi, 3\pi]$